

מרתון במבוא לבקרה

קורס 36113581 – אוניברסיטת בן גוריון

רון

חוברת זו נכתבה עבור הכנה למבחן בקורס **מבוא לבקרה**.
הכוללת תיאוריה, דוגמאות פתורות, ושאלות ממבחנים קודמים עם פתרון מלא.

חומר עזר: כל חומר עזר מותר במבחן.

כל הזכויות שמורות לרון.

תוכן העניינים

5	מערכות קלט-פלט (Input-Output Systems)	1
5	הגדרות יסוד	1.1
5	קטבים, אפסים וביטול קטב-אפס	1.2
6	חיבורי מערכות (System Connections)	1.3
8	תכונות מערכות	1.4
9	פאזה מינימלית ולא-מינימלית (Minimum / Non-Minimum Phase)	1.5
10	דוגמה פתורה — מציאת $M(s)$ ובדיקת יציבות	1.6
11	תמורת לפלס (Laplace Transform)	2
11	הגדרה ותכונות	2.1
11	מישור-s ואזור התכנסות (ROC)	2.2
13	זוגות תמורה נפוצים	2.3
13	משפטי ערך סופי וערך התחלתי	2.4
14	שברים חלקיים (Partial Fractions)	2.5
14	דוגמה — פתרון משוואה דיפרנציאלית	2.6
16	מרחב מצב (State Space Representation)	3
16	מהו מרחב מצב ולמה צריך אותו?	3.1
16	ייצוג מרחב מצב	3.2
17	ייצוגי קנוני	3.3
17	CCF — צורה קנונית בת-שליטה (Controllability Canonical Form)	3.3.1
18	DCF — צורה קנונית אלכסונית (Diagonal Canonical Form)	3.3.2
20	OCF — צורה קנונית ניתנת לתצפית (Observable Canonical Form)	3.3.3
20	סיכום השוואת הצורות הקנוניות	3.4
20	דוגמה — בניית CCF, DCF ו-OCF	3.5
21	מטריצת מעבר מצב (State Transition Matrix)	3.6
22	מערכות פאזה מינימלית מזווית מרחב מצב	3.7
22	שאלת מבחן: מועד א' 36113581 תשפ"ה — שאלה 1 (משוב K פנימי, OCF)	
22	לינאריזציה (Linearization)	3.8
23	שליטות, תצפיתיות ורות'-הורביץ (Controllability, Observability & Routh-Hurwitz)	4
23	שליטות (Controllability)	4.1
23	תצפיתיות (Observability)	4.2
24	קריטריון רות'-הורביץ (Routh-Hurwitz)	4.3
26	הפסקת שאלות מבחן (Exam Questions Break)	5
26	מערכות קלט-פלט ותמורת לפלס (I/O & Laplace)	5.1
32	מרחב מצב ולינאריזציה (State Space)	5.2
42	שליטות, תצפיתיות ורות'-הורביץ	5.3
46	מערכות מסדר שני (Second Order)	5.4
49	מקום השורשים (Root Locus)	5.5
51	שאלת מבחן — מועד ב' 36113581 (28/02/2025) שאלה 1	
51	שאלת מבחן: מועד ג' 36113581 — שאלה 1 (שתי כניסות, feedforward)	
51	שאלת מבחן: מועד א' (03/02/2025) שאלה 1 — BIBO ויציבות	
51	שאלת מבחן — מועד ב' 2024 (11/08/2024) שאלה 1	
51	שאלת מבחן — מועד ב' 2024 (11/08/2024) שאלה 2	

51	שאלת מבחן: מועד ב' 36113581 — שאלה 2 (DCF) מקביל, 3 מצבים)
51	שאלת מבחן: מועד ג' 36113581 — שאלה 2 (DCF) עם קטבים מרוכבים)
51	שאלת מבחן: מועד ג' 2024 — שאלה 2 (DCF) מסדר 4, פילוג מרכיבי מצב)
51	שאלת מבחן: מועד א' (03/02/2025) שאלה 2 — שליטות, תצפיתיות ומימוש מינימלי
51	שאלת מבחן — מועד א' 2024 (21/07/2024) שאלה 1 (חלקי)
51	שאלת מבחן — מועד ב' 2024 (11/08/2024) שאלה 4 (קריטריון רות' + קטבים דומיננטיים)
52	6 מערכות מסדר שני (Second Order Systems)
52	6.1 צורה סטנדרטית
52	6.2 סוגי ריסון
52	6.3 תכונות תגובת מדרגה (תת-ריסון)
54	שאלת מבחן — מועד ג' 36113581 (24/04/2025) שאלה 4 (מסדר שני + State Feedback)
54	שאלת מבחן: מועד ג' 2024 — שאלה 1 (מסדר שני, K מקסימלי, מערכת מקוננת)
55	7 מקום השורשים (Root Locus)
55	7.1 הגדרה ועיקרון
55	7.2 8 כללי שרטוט
64	8 עיצוב בקרים: PID ומפצה Lead-Lag
64	8.1 מבנה בקרי PID
66	8.2 שגיאת מצב מתמיד
69	8.3 מפצה Lead-Lag
73	שאלת מבחן: מועד ג' 36113581 — שאלה 3 (PI, שתי כניסות)
74	שאלת מבחן: מועד ב' 36113581 — שאלה 4 (בקר פולינומי)
76	שאלת מבחן: מועד א' (03/02/2025) שאלה 4 — PI ו-Feedforward לצמח אינטגרטור
79	9 בקרת מרחב מצב וצופה לואנברגר
79	9.1 משוב מצב (State Feedback)
80	9.2 מיקום קטבים (Pole Placement)
81	9.3 צופה לואנברגר (Luenberger Observer)
84	שאלת מבחן: מועד א' תשפ"ה — שאלה 3 (משוב מצב)
85	10 דיאגרמת בודה (Bode Diagram)
85	10.1 הגדרה
86	10.2 תגובת כל אלמנט
86	10.3 מתכון לשרטוט בודה — צעד אחר צעד
88	10.4 תהודה במערכת מסדר שני (Resonance Peak)
89	10.5 שולי רווח ופאזה מדיאגרמת בודה
90	10.6 פאזה מינימלית והקשר לבודה
92	שאלת מבחן: מועד א' תשפ"ה — שאלה 4 (בודה ומקום שורשים)
94	שאלת מבחן: מועד א' (03/02/2025) שאלה 3 — קריאת בודה, שולי יציבות ו-K קריטי
96	11 ניקויסט ושולי יציבות (Nyquist Plot & Stability Margins)
96	11.1 מוטיבציה — למה בכלל צריך את ניקויסט?
96	11.2 עיקרון הארגומנט של קושי (Cauchy's Argument Principle)
97	11.3 בניית קונטור ניקויסט (The Nyquist Contour)
98	11.4 קריטריון היציבות של ניקויסט
98	11.5 דוגמה פתורה 1 — ניקויסט מלא ($P_{OL} = 0$, קוטב בראשית)
100	11.6 שולי יציבות — שול הגבר ושול פאזה (Gain & Phase Margins)

11.7 דוגמה פתורה 2 – מציאת K עבור שול פאזה נתון 101

12 מערכות בדידות ותמורת Z (Discrete Time Systems & Z-Transform) 104

12.1 מוטיבציה – למה מערכות בדידות? 104

12.2 תמורת Z 104

12.3 דגימה והמיפוי $s \leftrightarrow z$ 105

12.4 ZOH – מחזיק מסדר אפס (Zero-Order Hold) 106

12.5 משוואות הפרשים – פתרון בעזרת תמורת Z 107

12.6 יציבות במישור z 107

12.7 מקום שורשים במישור z ומציאת K 108

1 מערכות קלט-פלט (Input-Output Systems)

1.1 הגדרות יסוד

הגדרה

מערכת היא פונקציה הממפה קלט $r(t)$ לפלט $y(t)$. ב-LTI (Linear Time-Invariant) – המערכת מתוארת על-ידי פונקציית תמסורת.

הגדרה

פונקציית תמסורת (Transfer Function):

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}, \quad n \geq m$$

היחס בין תמורת לפלט של הפלט לתמורת הקלט, בתנאי התחלה אפס.

1.2 קטבים, אפסים וביטול קטב-אפס

הגדרה

כל פונקציית תמסורת רציונלית ניתנת לכתיבה כ:

$$G(s) = k \cdot \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

□ **קוטב** (Pole): ערך $s = p_i$ שבו $G(s) \rightarrow \infty$ שורש של המכנה. הקטבים קובעים את ההתנהגות הדינמית (מהירות תגובה, יציבות).

□ **אפס** (Zero): ערך $s = z_i$ שבו $G(s) = 0$ שורש של המונה. האפסים משפיעים על צורת התגובה ועל הפאזה.

דוגמה: נתון

$$G(s) = \frac{2(s+3)}{(s+1)(s-2)}$$

□ **אפס:** $s = -3$ (המונה $2(s+3) = 0 \Rightarrow s = -3$).

□ **קטבים:** $s = -1$ (LHP, יציב) ו- $s = +2$ (RHP, לא יציב).

□ בדיקה: $G(-3) = 0$, $G(-1) \rightarrow \infty$, $G(2) \rightarrow \infty$.

המערכת אינה BIBO יציבה כי יש קוטב ב-RHP ($s = +2$).

הגדרה

ביטול קטב-אפס (Pole-Zero Cancellation): כאשר קוטב ואפס ממוקמים באותו מיקום בדיוק – הם מבטלים זה את זה ונעלמים מהביטוי.

פונקציית תמסורת **מינימלית** (Minimal Realization): לאחר ביצוע כל ביטולי קטב-אפס – לא נשאר גורם משותף למונה ולמכנה.