

מרתון בתקשורת מודרנית

רון בנימין

יוני 2025

זכויות יוצרים

2025 מרתון בתקשורת מודרנית

כל הזכויות שמורות.

חוברת זו נכתבה ונערכה במיוחד עבור סטודנטים הלומדים את המרתון בתקשורת מודרנית להנדסת חשמל. החוברת כוללת הסברים תמציתיים, דוגמאות, תרגילים פתורים, וידע שנאסף ממגוון מקורות כולל הרצאות, תרגולים, ומסמכים רשמיים של הקורס.

אין להעתיק, לשכפל, להפיץ, לתרגם, להציג בפומבי, או לעשות כל שימוש מסחרי בתכני החוברת, כולם או חלקם, ללא קבלת רשות מפורשת מראש ובכתב מהיוצר.

השימוש בחוברת מותר לסטודנטים לצורכי לימוד אישי בלבד. הכותב אינו אחראי לשגיאות, אי דיוקים, או תוצאות הנובעות משימוש במידע המופיע בה.

נכתב וערוך על ידי:

רון בנימין

גרסה אחרונה: יוני 2025

1 מושגים והגדרות בסיסיות

אותות אנרגיה ואותות הספק

ניתן לסווג אותות לפי סוג הגודל שהם מייצגים: אנרגיה או הספק.

אות אנרגיה הוא אות שעבורו האנרגיה הכוללת סופית ומוגדרת על ידי:

$$E_v = \int_{-\infty}^{\infty} |v(t)|^2 dt$$

אם $0 < E_v < \infty$, אז $v(t)$ הוא אות אנרגיה.

אות הספק הוא אות שעבורו ההספק הממוצע סופי ומוגדר על ידי:

$$P_v = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |v(t)|^2 dt$$

אם $0 < P_v < \infty$, אז $v(t)$ הוא אות הספק.

רקע פיזיקלי

במערכות תקשורת, האותות מיוצגים בדרך כלל כמתח או זרם. בהנחה של התנגדות $R = 1 \Omega$, נוח לחשב את ההספק כ- $v^2(t)$. ניתן להבין את הקשר בין האנרגיה או ההספק של אות לבין הביטוי $v^2(t)$ כפונקציה של הזמן.

אותות מחזוריים

עבור אות מחזורי $v(t)$ עם מחזור T , ההספק הממוצע ניתן על ידי:

$$P_v = \frac{1}{T} \int_0^T |v(t)|^2 dt$$

משפט פרסבל

עבור אות מחזורי: אם $v(t)$ מקיים את תנאי דיריכלה ויש לו טור פורייה:

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n f_0 t}, \quad f_0 = \frac{1}{T}$$

אז לפי משפט פרסבל:

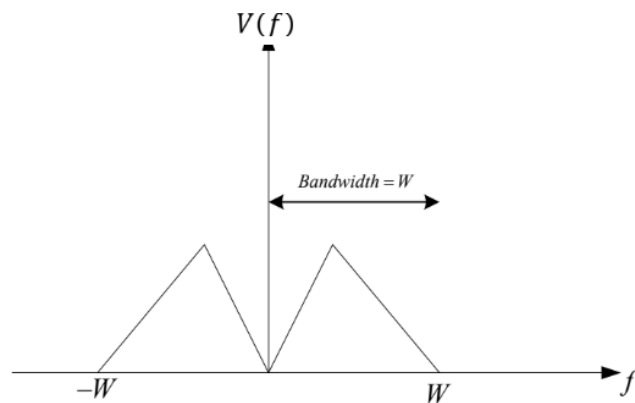
$$P_v = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

עבור אות לא מחזורי: אם $v(t)$ מקיים את תנאי דיריכלה, נגדיר את התמרת פורייה:

$$V(f) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

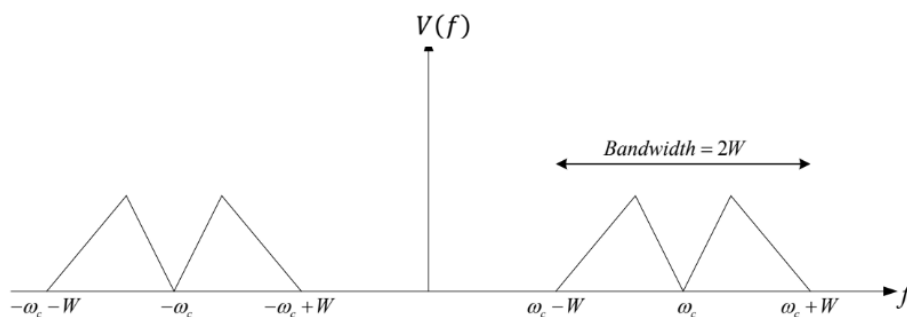
אז:

$$E_v = \int_{-\infty}^{\infty} |v(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |V(f)|^2 df$$



רוחב סרט (Bandwidth)

רוחב הסרט של אות $v(t)$ עם התמרת פורייה $V(f)$ מוגדר כטווח התדרים שבו $V(f) \neq 0$. לדוגמה:



עבור אותות ממשיים, ההתמרה סימטרית ולכן יש לקחת בחשבון גם תדרים שליליים. קיימות גם הגדרות נוספות לרוחב סרט, כמו רוחב סרט אפקטיבי שבו האנרגיה שמחוץ לתחום זניחה לפי קריטריון שנבחר.

2 ייצוג אותות בפס בסיס ובפס מעבר

הבחנה בין פס בסיס לפס מעבר

אות בפס בסיס (Baseband) הוא אות אשר תחום התדרים שלו מרוכז סביב תדר אפס. לדוגמה: אות דיבור אשר מוגבל לתדרים בתחום $[0, 4]$ kHz נחשב לאות בפס בסיס. **אות בפס מעבר (Passband)** מתקבל כאשר מזיזים את האות בפס בסיס כך שיאכלס תחום תדרים גבוה יותר (למשל סביב תדר f_c), כדי לאפשר שידור בתווך תקשורת משותף.

ייצוג מתמטי של אות בפס מעבר

האות בפס מעבר $v_{bp}(t)$ מיוצג כ:

$$v_{bp}(t) = A(t) \cos(2\pi f_c t + \varphi(t))$$

כאשר:

$A(t)$ היא אמפליטודת האות (envelope) $\square$

$\varphi(t)$ היא הפאזה המיידית $\square$

f_c הוא תדר המרכז של תחום הפס $\square$

ייצוג באמצעות מרכיבים אורתוגונליים

מקובל להציג את האות בפס מעבר באמצעות שני רכיבים אורתוגונליים (In-phase ו-Quadrature):

$$v_{bp}(t) = v_{in}(t) \cos(2\pi f_c t) - v_q(t) \sin(2\pi f_c t)$$

כאשר:

$$A(t) = \sqrt{v_{in}^2(t) + v_q^2(t)}, \quad \varphi(t) = \tan^{-1} \left(\frac{v_q(t)}{v_{in}(t)} \right)$$

ובתחום התדר:

$$V_{bp}(f) = \frac{1}{2} (V_{in}(f - f_c) + V_{in}(f + f_c)) + \frac{j}{2} (V_q(f - f_c) - V_q(f + f_c))$$

הקשר בין ייצוג בפס בסיס לייצוג בפס מעבר

ניתן לתאר את $v_{bp}(t)$ באמצעות אות שקול בפס בסיס (LPE - Low Pass Equivalent):

$$v_{LPE}(t) = v_{in}(t) + jv_q(t)$$

הקשר בין ההתמרות בפס מעבר לפס בסיס הוא:

$$V_{bp}(f) = \frac{1}{2} [V_{LPE}(f - f_c) + V_{LPE}^*(-f - f_c)]$$

ייצוג זה מאפשר לבצע ניתוחים ואפנונים בפשטות בתחום פס הבסיס, ואחר כך להזיזם לפס מעבר.

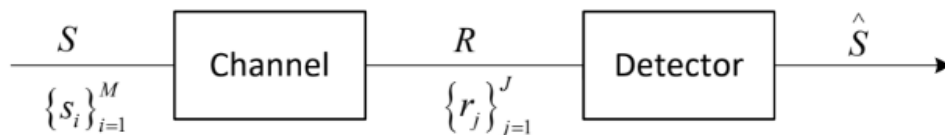
3 הגדרת בעיית הגילוי בערוץ בדיד ורציף

נניח שמערכת התקשורת משדרת סימבול S מתוך קבוצה בדידה בגודל M :

$$S \in \{s_1, s_2, \dots, s_M\}$$

לכל סימבול יש הסתברות אפריורית $\Pr(S = s_i)$.

בצד הקליטה מתקבל סימבול R אשר עובר דרך הערוץ (עם רעש), וצריך לקבוע מה היה S המקורי על סמך R . התהליך כולו ניתן לתיאור באמצעות תרשים:



ערוץ בדיד

הערוץ ממפה סימבול משודר לערך בדיד אחר לפי הסתברויות מעבר:

$$\Pr(R = r_j | S = s_i), \quad j = 1, \dots, J$$

כאשר R מקבל ערכים מתוך קבוצה בגודל סופי J .

כדי שיהיה ניתן לבצע גילוי חד-משמעי של S מתוך R , יש לדרוש לרוב ש- $J \geq M$.

ערוץ רציף

בערוץ רציף, הפלט R הוא משתנה רציף. המאפיין המרכזי של הערוץ הוא פונקציית צפיפות מותנית:

$$f_{R|S=s_i}(r) \quad \text{(Likelihood גם)}$$

כלומר, עבור כל סימבול s_i יש צפיפות מותנית שמתארת את ההתפלגות של R בהתחשב ש- $S = s_i$.

הגלאי (Detector)

הגלאי מבצע החלטה דטרמיניסטית ומוצא את S על סמך R . המטרה היא לבחור כלל החלטה שיקטין את הסתברות השגיאה:

$$P_e = \Pr(\hat{S}(R) \neq S)$$

דוגמה למיפוי בערוץ בדיד

נניח כי ערך המשודר S יכול להיות אחד מתוך שלושה סימבולים:

$$S \in \{0, 1, 2\}$$

והערך הנקלט R יכול להיות גם הוא בדיד, מתוך:

$$R \in \{0, 1, 2\}$$

הערוץ מוגדר על ידי טבלת הסתברויות מעבר מהצורה:

$$\Pr(R = r_j | S = s_i)$$

	R		
	2	1	0
S	0.0	0.4	0.6
0	0.4	0.4	0.2
1	0.5	0.4	0.1
2			

כל שורה מייצגת את ההתפלגות של R עבור קבוע של S . לדוגמה:

$$\Pr(R = 1 | S = 2) = 0.4$$

4 כלל החלטה MAP

מטרה

המטרה של הגלאי היא לקבוע מה היה הסימבול S שנשלח, על סמך הסימבול R שהתקבל בערוץ רועש. כלל החלטה MAP בוחר את הסימבול שהכי סביר שנשלח, בהינתן הסימבול שהתקבל:

$$\hat{S}(R) = \arg \max_{s_i} \Pr(S = s_i | R = r)$$