

מרתון במערכות ספרתיות להנדסת חשמל

רון בנימין

מאי 2025

זכויות יוצרים

2025 מרתון במערכות ספרתיות להנדסת חשמל

כל הזכויות שמורות.

חוברת זו נכתבה ונערכה במיוחד עבור סטודנטים הלומדים את המרתון במערכות ספרתיות להנדסת חשמל. החוברת כוללת הסברים תמציתיים, דוגמאות, תרגילים פתורים, וידע שנאסף ממגוון מקורות כולל הרצאות, תרגולים, ומסמכים רשמיים של הקורס.

אין להעתיק, לשכפל, להפיץ, לתרגם, להציג בפומבי, או לעשות כל שימוש מסחרי בתכני החוברת, כולם או חלקם, ללא קבלת רשות מפורשת מראש ובכתב מהיוצר.

השימוש בחוברת מותר לסטודנטים לצורכי לימוד אישי בלבד. הכותב אינו אחראי לשגיאות, אי דיוקים, או תוצאות הנובעות משימוש במידע המופיע בה.

נכתב וערוך על ידי:

רון בנימין

גרסה אחרונה: מאי 2025

1 אלגברה בוליאנית

1.1 מבוא

האלגברה הבוליאנית מבוססת על סדרת **אקסיומות**. באמצעות פעולות **סימבוליות** ניתן להסיק מסקנות נוספות מהאקסיומות. האלגברה הבוליאנית מוגדרת באמצעות קבוצה סופית של איברים B , עם שתי פעולות בינאריות $+$ ו- $\cdot$.

1.2 הגדרה

הגדרה: אלגברה בוליאנית היא קבוצה B עם לפחות שני איברים, יחד עם שתי פעולות בינאריות $+$ (חיבור) ו- $\cdot$ (כפל), עם איברי יחידה ואיברים משלימים, המקיימים את האקסיומות הבאות:

1.3 אקסיומות האלגברה הבוליאנית

זהות: לכל $a \in B$

$$a + 0 = a, \quad a \cdot 1 = a$$

איבר משלים: לכל $a \in B$, קיים איבר משלים $\bar{a}$ כך ש:

$$a + \bar{a} = 1, \quad a \cdot \bar{a} = 0$$

חילופיות: לכל $a, b \in B$

$$a + b = b + a, \quad a \cdot b = b \cdot a$$

פילוג: לכל $a, b, c \in B$

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c), \quad a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$$

1.4 משפטים ולמות

חוק זה-מורגן לכל $a, b \in B$ מתקיים:

$$\overline{a + b} = \bar{a} \cdot \bar{b}, \quad \overline{a \cdot b} = \bar{a} + \bar{b}$$

משפט לכל $a \in B$ מתקיים:

$$a + a = a, \quad a \cdot a = a$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} a + a &= (a \cdot 1) + a \\ &= a \cdot (1 + 1) = a \cdot 1 = a \end{aligned}$$

באופן דומה, ניתן להוכיח $a \cdot a = a$ באמצעות חוק הפילוג.

משפט: באלגברה בוליאנית B , לכל $a \in B$ קיים משלים יחיד.
הוכחה: נניח שישנם שני משלימים, כלומר לכל $x, y \in B$ מתקיים:

$$a + x = 1, \quad a \cdot x = 0$$

$$a + y = 1, \quad a \cdot y = 0$$

נראה כי $x = y$:

1. מכיוון ש- x הוא משלים של a , ניתן לחבר את המשוואה הראשונה עם המשוואה השנייה:

$$x = x \cdot 1 = x \cdot (a + y)$$

לפי חוק הפילוג:

$$x = (x \cdot a) + (x \cdot y)$$

אבל ידוע ש- $x \cdot a = 0$, לכן:

$$x = 0 + (x \cdot y) = x \cdot y$$

2. באופן סימטרי, נעשה אותו דבר גם עבור y :

$$y = y \cdot 1 = y \cdot (a + x)$$

לפי חוק הפילוג:

$$y = (y \cdot a) + (y \cdot x)$$

אבל ידוע ש- $y \cdot a = 0$, לכן:

$$y = 0 + (y \cdot x) = y \cdot x$$

3. מהמשוואות $x = x \cdot y$ ו- $y = y \cdot x$, מתקבל:

$$x = y$$

מכאן נובע כי המשלימים של a חייבים להיות זהים, ולכן המשלימים באלגברה בוליאנית הם יחידים. $\square$

לא רק שהמשלים יחיד, המשלים של המשלים הוא המקור.
טענה: באלגברה בוליאנית B , לכל $a \in B$ מתקיים $\bar{\bar{a}} = a$.
הוכחה: עלינו למצוא איבר x כך ש:

$$\bar{a} + x = 1, \quad \bar{a} \cdot x = 0$$

וממשפט יחידות המשלים נקבל ש- $x = a$, כלומר $\bar{\bar{a}} = a$.

למה באלגברה בוליאנית B , לכל $a \in B$ מתקיים:

$$1 + a = 1, \quad 0 \cdot a = 0$$

הוכחה: נוכיח את החלק הראשון, והשני נובע מדואליות:

$$1 + a \equiv (1 + a) \cdot 1 \equiv (a + 1) \cdot 1 \equiv (a + 1) \cdot (a + \bar{a}) \equiv a + (1 \cdot \bar{a}) \equiv a + \bar{a} \equiv 1$$

משפט באלגברה בוליאנית B , לכל $a, b \in B$ מתקיים:

$$a + (a \cdot b) = a, \quad a \cdot (a + b) = a$$

הוכחה: נוכיח את הראשון, והשני נובע מדואליות:

$$a + (a \cdot b) \equiv (a \cdot 1) + (a \cdot b) \equiv a \cdot (1 + b) \equiv a \cdot 1 \equiv a$$

למה באלגברה בוליאנית B , לכל $a, b \in B$ מתקיים:

$$a + (\bar{a} \cdot b) = a + b, \quad a \cdot (\bar{a} + b) = a \cdot b$$

הוכחה: שוב, נשתמש בדואליות ונוכיח את החלק הראשון:

$$a + (\bar{a} \cdot b) \equiv (a + \bar{a}) \cdot (a + b) \equiv 1 \cdot (a + b) \equiv a + b$$

למה באלגברה בוליאנית B , לכל $a, b \in B$ מתקיים:

$$(a + b) \cdot (\bar{a} + b) = b, \quad (a \cdot b) + (\bar{a} \cdot b) = b$$

הוכחה: נשוב ונשתמש בדואליות:

$$(a + b) \cdot (\bar{a} + b) \equiv (b + a) \cdot (b + \bar{a}) \equiv b + (a \cdot \bar{a}) \equiv b + 0 \equiv b$$

משפט באלגברה בוליאנית B , לכל $a, b, c \in B$ מתקיים:

$$(a + b) + c = a + (b + c), \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

פישוט ביטוי בוליאני

שאלה: בעזרת זהויות בוליאניות, פשט את הביטוי הבא:

$$F(X, Y, Z) = X'Y + YZ' + YZ + XY'Z'$$

פתרון:

שלב 1: קיבוץ איברים לצורך פישוט:

$$F = X'Y + XY'Z' + YZ' + YZ$$

שלב 2: הוצאת גורמים משותפים:

$$F = X'Y + YZ' + YZ + XY'Z'$$

$$= X'Y + Y(Z' + Z) + XY'Z'$$

באמצעות הזהות $Z' + Z = 1$:

$$F = X'Y + Y \cdot 1 + XY'Z'$$

$$= X'Y + Y + XY'Z'$$

שלב 3: שימוש בכלל $X + XY = X$:

$$F = Y + XY'Z'$$

שלב 4: שימוש בכלל $X + X'Y = X + Y$:

$$F(X, Y, Z) = Y + XZ'$$

תוכן	כותרת
באלגברה בוליאנית, לכל $a \in B$ מתקיים: $a + a = a \quad a \cdot a = a$	למה (אידמפוטנטיות)
כל זהות באלגברה בוליאנית היא נכונה גם אם (בו זמנית) מחליפים $+$ ב-$\cdot$, ו-0 ב-1.	משפט (דואליות)
באלגברה בוליאנית B, לכל $a \in B$ קיים משלים יחיד.	משפט
באלגברה בוליאנית B, לכל $a \in B$ מתקיים: $a + 1 = 1 \quad 0 \cdot a = 0$	למה
באלגברה בוליאנית B, לכל $a, b \in B$ מתקיים: $a + (a \cdot b) = a \quad a \cdot (a + b) = a$	למה
באלגברה בוליאנית B, לכל $a, b \in B$ מתקיים: $a + (\bar{a} \cdot b) = a + b \quad a \cdot (\bar{a} + b) = a \cdot b$	למה
באלגברה בוליאנית B, לכל $a, b \in B$ מתקיים: $(a + b) \cdot (\bar{a} + b) = b \quad (a \cdot b) + (\bar{a} \cdot b) = b$	משפט
באלגברה בוליאנית B, לכל $a, b, c \in B$ מתקיים: $(a + b) + c = a + (b + c)$ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	משפט
באלגברה בוליאנית B, לכל $a, b \in B$ מתקיים: $\overline{(a + b)} = \bar{a} \cdot \bar{b} \quad \overline{(a \cdot b)} = \bar{a} + \bar{b}$	משפט

טבלה 1: למות ומשפטים באלגברה בוליאנית